# CALCUL VARIAŢIONAL

1. Să se determine extremele funcţionalei

$$I(y)=\int_c^1\left(y'^2+y\cos x-y^2-x^2y\right)\cdot e^{2x}dx,\ y\in c^2[S_1],\ y(0)=0,\ y_2(1)=-\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\sin 1$$

***R:*** Condiţie necesară de extrem – Euler. $\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$, unde F este Lagrangeanul funcţionalei.

$$F(x,y,y')=(y'^2+y\cos x-y^2-x^2y)\cdot e^{2x}$$

Avem $\frac{\partial F}{\partial y}=(\cos x-2y-x^2)\cdot e^{2x}$; $\frac{\partial F}{\partial y'}=2y'\cdot e^{2x}$

Ecuaţia lui Euler devine:

$$(\cos x-2y-x^2)e^{2x}-\frac{d}{dx}(2y'e^{2x})=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\cos x-2y-x^2)e^{2x}-2(y''e^{2x}+2y'e^{2x})=0$$

Împărţind în ambii membrii cu $e^{2x}$, avem: $\cos x-2y-x^2-2y''-4y'=0$.

Ordonând găsim: $2y''+4y'+2y=\cos x-x^2$, care e o ecuaţie diferenţială de ordinul 2 liniară cu coeficienţi constanţi şi neomogenă.

Ştim că soluţia generală a acestei ecuaţii este: $y=\bar{y}+y_p$ unde $\bar{y}$ este soluţia generală a ecuaţiei omogene, iar $y_p$ e o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene.

Pentru a găsi soluţia generală $\bar{y}$ a ecuaţiei ne folosim de ecuaţia caracteristică.

Ecuaţia caracteristică este $er^2+4r+2=0 \Rightarrow (r+1)^2=0 \Rightarrow r_1=r_2=-1$ deci are o rădăcină dublă. Deducem $\overline{y}=C_1\cdot e^{-x}+C_2xe^{-x}$.

Soluţia particulară o căutăm de forma membrului drept vom căuta $y_p=y_1+y_2$.

Căutăm $y_1$ de forma $y_1=A\cos x+B\sin x$ şi determinăm constantele A şi B punând condiţia ca $y_1$ să verifice ecuaţia: $2y''+4y'+2y=\cos x$.

Avem $y_1'=-A\sin x+B\cos x;\ y_1''=-A\cos x-B\sin x \Rightarrow y_1=\frac{1}{4}\sin x.$

Căutăm $y_2$ de forma $y_2=Ax^2+Bx+C$ şi observăm că nu avem rezonanţă. Punând condiţia ca $y_2$ să verifice ecuaţia $2y''+4y'+2y=-x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow A=-\frac{1}{2}, B=2, C=-3.$ Prin urmare $y_2=-\frac{x^2}{2}+2x-3.$

*Concluzii:* Soluţia generală a ecuaţiei lui Euler este:

$$y=C_1\cdot e^{-x}+C_2\cdot e^{-x}+\frac{1}{4}\sin x-\frac{x^2}{2}+2x-3.$$

Soluţia generală ne dă mulţimea extremelor funcţionalei date punând condiţii date în problemă găsim $C_1=-C_2=3$, deci funcţionala I(y) are o singură extremală admisibilă. Aceasta este

$$y=3e^{-x}-3xe^{-x}+\frac{1}{4}\sin x-\frac{x^2}{2}+2x-3. \tag{1}$$

*Concluzie:* Dacă funcţionala dată are puncte a de extrem atunci extremala admisibilă de mai sus este un punct de extrem.

*Observaţii.* Condiţiile lui Legendre ne spun că o condiţie necesară ca o extremală $y_0$ să fie punct de max(min) este ca $Fy'y'(x,y_0(x),y_0'(x))<0(>0)$ pentru $(\forall)\ x\in[a,b].$ În cazul nostru avem $Fy'y'=2e^{2x}>0,\ (\forall)\ x\in[0,1].$

*Concluzii:* Dacă y dat de (1) e punct de extrem pentru funcţionala I(y), atunci acesta e un punct de minim.

2. Să se determine extremalele funcţionalei

$$I(y)=\int_0^{\pi}(y''^2-y'^2-12xy+ky\cos x)dx,\ y\in C^4[0,\pi],$$
$$y^{(0)}=y'^{(0)}=0,\ y(\pi)=\pi^3,\ y'(\pi)=-\frac{\pi}{4}+3\pi^2$$

***R:*** O condiţie necesară de extrem pentru această funcţională e dată de ecuaţia lui Euler – Poisson: $\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)=0,$ unde F este Lagrangeanul funcţionalei care în cazul nostru este:

$$F(x,y',y'')=y''^2-y'^2-12xy+ky\cos x.$$

Avem $\frac{\partial F}{\partial y}=-12x+\cos x;\ \frac{\partial F}{\partial y'}=-2y';\ \frac{\partial F}{\partial y''}=2y''.$

Înlocuind în ecuaţia Euler-Poisson avem:

$-12x+\cos x-\frac{d}{dx}(-2y')+\frac{d^2}{dx^2}(2y'')=0\Leftrightarrow 2y^{IV}+2y''=12x-\cos x,$ ecuaţie diferenţială de ordin 4, liniară cu coeficienţi constanţi, neomogenă.

Soluţia generală a ecuaţiei este : $y=\overline{y}+y_p$.

Rezolvăm ecuaţia caracteristică $2r^4+2r^2+2=0\Leftrightarrow r^2(r+1)^2=0\Rightarrow$

$\Rightarrow r_1=r_2=0;\ \ r_{3,4}=\pm i\Rightarrow \overline{y}=C_1+C_2x+C_3\cos x+C_4\sin x.$

Pentru soluţia $y_P$ vom lua $y_p=y_1+y_2$, unde $y_1$ e soluţia particulară a ecuaţiei neomogene $2y^{IV}+2y''=12x,$ iar $y_2$ e soluţia particulară a ecuaţiei neomogene $2y^{IV}+2y''=-\cos x.$

Căutăm $y_1$ de forma membrului drept, adică $y_1 = Ax + B,$ dar comparând $\overline{y}$, constatăm că avem rezonanţă pe care o înlăturăm dacă luăm $y_1 = (Ax + B)x^2$.

Avem $y_1' = 3Ax^2 + 2Bx;\ y_1'' = 6Ax + 2B;\ y_1''' = 6A;\ y_1^{IV} = 0$ care înlocuiţi în ecuaţia $2y^{IV} + 2y'' = 12x,$ conduc la: $12Ax + 4B = 12x.$

Căutăm $y_2$ de forma membrului drept, adică $y = A\cos x + 13\sin x$ dar comparând cu $\overline{y}$ constatăm că avem rezonanţă. Pentru a înlătura rezonanţa luăm $y_2 = x(A\cos x + B\sin x).$ Avem

$$y' = A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x)$$

$$y_2'' = -A\sin x + B\cos x - A\sin x + B\cos x + x(-A\cos x - B\sin x) =$$
$$= -2A\sin x + 2B\cos x - x(A\cos x + B\sin x)$$

$$y_2''' = -3A\cos x - 3B\sin x + x(A\sin x - B\cos x)$$

$$y_2^{IV} = 4A\sin x - 4B\cos x + x(A\cos x + B\sin x)$$

Înlocuind în ecuaţia

$$2y^{IV} + 2y'' = -\cos x \Rightarrow 8A\sin x - 8B\cos x + 2x(A\cos x + B\sin x) - 4A\sin x +$$
$$+ 4B\cos x - 2x(A\cos x + B\sin x) = -\cos x \Leftrightarrow 4A\sin x - 4B\cos x = -\cos x.$$

$$\text{Identif.coef.} \Rightarrow \left.\begin{aligned} A &= 0 \\ B &= \frac{1}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_2 = \frac{x}{4}\sin x.$$

Soluţia generală care ne dă mulţimea extremelor funcţionalei date este:

$$y = \overline{y} + y_1 + y_2 = C_1 + C_2 x + C_3\cos x + C_4\sin x + x^3 + \frac{x}{4}\sin x.$$

Punem condiţiile din enunţ:

$$y' = C_2 - C_3\sin x + C_4\cos x + 3x^2 + \frac{1}{4}\sin x + \frac{x}{4}\cos x.$$

Deci $\begin{cases} y(0)=y'(0)=0 \\ y(\pi)=\pi^3 \\ y'(\pi)=-\dfrac{\pi}{2}+3\pi^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1+C_3=0 \\ C_2+C_4=0 \\ C_1+C_2\pi+C+\pi^3=\pi^3 \\ C_2-C_4+3\pi^2-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{4}+3\pi^2 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1+C_3=0 \\ C_1-C_3+C_2\pi=0 \\ C_2+C_4=0 \\ C_2-C_4=0 \end{cases} \left| \begin{array}{l} \Rightarrow C_1=C_3=0 \\ \\ \Rightarrow C_2=C_4=0 \end{array} \right. .$$

*Concluzie:* Funcţionala dată are o singură extremală admisibilă şi anume: $y=x^3+\dfrac{x}{4}\sin x$ .

Dacă extremala admite extrem atunci acest extrem se realizează pentru $y_0=x^3+\dfrac{x}{4}\sin x.$

*Observaţie.* Condiţia lui Legendre $Fy''Fy''=2 \Rightarrow Fy''y''(x_1y_0(x),y_0'(x),y_0''(x))>0,(\forall)x\in[0,\pi].$ Funcţionala admite extrem $\Rightarrow$ se realizează pentru $y=y_0$ şi $y_0$ punct de minim.

3. Să se determine extremalele funcţionalei

$$I(y)=\int_0^1 \frac{y\ln y}{y'}dx,\ y\in C^2[0,1],\ y(0)=e \text{ şi } y(1)=e^{e^2}.$$

***R:*** Ştim că o condiţie necesară de extrem pentru acest tip de funcţionale e dată de ecuaţia lui Euler.

În cazul nostru, Lagrangeanul este $F(x,y,y')=\dfrac{y\ln y}{y'}$ şi observăm că nu depinde de x.

Ştim că în cazul $F=F(y,y')$, ecuaţia lui Euler, după prelucrare se poate aduce la forma:

$$F(y,y')-y'Fy'(y,y')=C_1 \qquad (*)$$

Avem: $Fy(y,y')=\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{y\ln y}{y'}\right)=-\frac{y\ln y}{y'^2}$

Înlocuim în ecuaţia (*)

$$\frac{y\ln y}{y'}+y'\cdot\frac{y\ln y}{y'^2}=C_1 \Leftrightarrow 2y\ln y=C_1\cdot y' \Leftrightarrow C_1\cdot\frac{y'}{y}=2\ln y \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow C_1(\ln y)'=2\ln y \Leftrightarrow C_1\frac{(\ln y)'}{\ln y}=2.$$

Prin integrare

$\Rightarrow C_1\int\frac{(\ln y)'}{\ln y}dx=2\int dx+C_2 \Rightarrow C_1\ln(\ln y)=2x+C_2 \rightarrow$ soluţia generală a ecuaţiei lui Euler.

Punem condiţiile

$$\begin{cases} y(0)=e \\ y(1)=e^{e^2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1\ln(\ln e)=2\cdot 0+C_2 \\ C_1\ln(\ln e^{e^2})=2\cdot 1+C_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1\ln 1=C_2 \\ C_1\ln(e^2)=2+C_2\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_2=0 \\ 2C_1=2\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} C_1=1 \\ C_2=0\end{matrix}$$

Găsim o singură extremală admisibilă şi anume $\ln(\ln y)=2x \Leftrightarrow \ln y=e^{2x} \Leftrightarrow y=e^{e^{2x}}$.

Funcţionala dată are extrem, acesta se realizează în mod necesar în $y=e^{e^{2x}}$.

**Condiţia lui Legendere.**

$$Fy'y'=\frac{\partial}{\partial y'}\left(-\frac{y\ln y}{y'^2}\right)=\frac{2yy'\ln y}{y'^4}>0,\ (\forall)\ x\in[0,1].$$

Dacă extremala găsită este un punct de extrem, atunci acesta e de min.

Dacă funcţionala are extrem, atunci punctul de extrem $ey = e^{e^2}$ şi acest punct e un punct de minim.

4. Să se determine extremalele funcţionalei

$$I(y) = \int_1^4 \left(y^2 - 2x^2y'^2\right)dx;\ \ y \in C^2[1,4];\ y(0) = 1,\ y(4) = \frac{1}{2}[\cos(\ln 2) + \sin(\ln 2)].$$

***R:*** Condiţia necesară de extrem e dată de ecuaţia lui Euler:

$\dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$, unde F e Lagrangeanul funcţionalei care la noi este

$F(x, y, y') = y^2 - 2x^2 \cdot y'^2.$

Avem $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y$ şi $\dfrac{\partial F}{\partial y'} = -4x^2 \cdot y'$ .

Înlocuind în ecuaţia lui Euler obţinem:

$$2y - \frac{d}{dx}\left(-4x^2 \cdot y'\right) = 0 \Leftrightarrow 2y + 4(2xy' + x^2y'') = 0 \Leftrightarrow 2x^2y'' + 4xy' + y = 0$$

rezultă un calcul de tip Euler.

Pentru a găsi soluţia acestei ecuaţii ne folosim de ecuaţia caracteristică ce se obţine punând $y = x^r$ avem $y' = r \cdot x^{r-1}$ şi $y'' = r(r-1) \cdot x^{r-2}$ .

După înlocuire în ecuaţie şi simplificare cu $x^r$ rezultă ecuaţia caracteristică $2r(r-1) + 4r + 1 = 0 \Leftrightarrow 2r^2 + 2r + 1 = 0$ cu rădăcinile $r_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i}{2}$ .

Conform teoriei de la ecuaţia Euler avem

$y = x^{-\frac{1}{2}}\left[C_1 \cos\left(\dfrac{\ln x}{2}\right) + C_2 \sin\left(\dfrac{\ln x}{2}\right)\right]$, care reprezintă soluţia generală care ne dă mulţimea extremalelor funcţionalei date.

Punând condiţiile date în enunţ $\Rightarrow C_1 = C_2 = 1 \Rightarrow$ funcţionala dată are o singură extremală admisibilă.

Deducem că dacă funcţionala dată are puncte de extrem atunci extremala admisibilă $y_0 = \frac{1}{\sqrt{x}}\left[\cos(\ln x) + \sin(\ln\sqrt{x})\right]$ e un punct de extrem.

**Condiţia lui Legendere**

$F_{y'y'} = -4x^2 \Rightarrow F_{y'y'}(x, y_0(x), y_1'(x)) < 0,\ (\forall)\, x \in [1,4]$. Dacă funcţionala are extrem, atunci acesta se realizează pentru $y = y_0$ şi $y_0$ e punct de maxim.

5. Să se determine extremalele funcţionalei

$$I(y) = \int_1^2 \frac{y^2 - 4x^2y'^2 + xy}{x^2}dx,\ y \in C^2[1,2],\ y(1) = \frac{1}{2},\ y(2) = \sqrt{2}(1 + \ln 2) - 1$$

***R:*** Condiţia necesară de extrem $\rightarrow$ ecuaţia lui Euler.

$$F(x, y, y') = \frac{y^2 - 4x^2y'^2 + xy}{x^2}$$

Avem $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y + x^{x^2}}{x^2}$ şi $\frac{\partial F}{\partial y'} = -8y'$.

Înlocuind în ecuaţia lui Euler, avem:

$$\frac{2y + x}{x^2} - \frac{d}{dx}\left(-8y'\right) = 0 \Leftrightarrow 8y'' + \frac{2y + x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$8x^2y'' + 2y = -x \Leftrightarrow 4x^2y'' + y = -\frac{x}{2}$$

care e o ecuaţie diferenţială de ordinul 2, liniară neomogenă cu coeficient variabil de tip Euler.

Soluţia generală a acestei ecuaţii va fi $y = \bar{y} + y_p$, unde $\bar{y}$ - soluţia generală a ecuaţiei omogene iar $y_p$ e soluţia particulară a ecuaţiei neomogene.

a) Rezolvăm ecuaţia omogenă $4x^2y'' + y = 0$, folosindu-ne de ecuaţia caracteristică. Ecuaţia se obţine punând $y = e^r$ în ecuaţia omogenă. Avem $y' = r \cdot x^{r-1}$.

6. Să se determine extremalele funcţionalei

$$I(y,z) = \int_1^2 \left(x^2 \cdot y'^2 + x^2 \cdot z'^2 + 2y^2 + 6z^2 + 2xy + 2xz\right)dx,\ yz \in C^2(1,2];$$
$$y(1) = 1, z(1) = 0, y(2) = \frac{2}{3}(3 + \ln 2), z(2) = \frac{1}{2}.$$

***R***: Condiţia necesară de extrem $\rightarrow$ sistemul Euler-Lagrange

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z'}\right) = 0 \end{cases}$$, unde F e Lagrangeanul funcţionalei, adică

$$F(x, y, z, y', z') = x^2y'^2 + x^2z'^2 + 2y^2 + 6z^2 + 2xy + 2xz$$

Avem: $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 4y + 2x;\ \dfrac{\partial F}{\partial y'} = 2x^2y'$

$\dfrac{\partial F}{\partial z} = 12z + 2x;\ \dfrac{\partial F}{\partial z'} = 2x^2 \cdot z'$

Înlocuind în sistem rezultă

$$\begin{cases} 4y + 2x - \dfrac{d}{dx}\left(2x^2y'\right) = 0 \\ 12z + 2x - \dfrac{d}{dx}\left(2x^2z'\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y + 2x - 4xy' - 2x^2y' = 0 \\ 12z + 2x - 4xz' - 2x^2z'' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2y'' + 2xy' - 2y = x \\ x^2z'' + 2xz' - 6z = x \end{cases}$$

Observăm că fiecare ecuaţie a sistemului e liniară de ordin 2, neomogenă de tip Euler.

Soluţia generală pentru prima ecuaţie: $y = \bar{y} + y_1$

Găsim soluţia generală

$$y = x^r \quad y' = r \cdot x^{r-1}; y'' = r(r-1)x^{r-2} \Rightarrow x^2(r-1)\cdot r \cdot x^{r-2} + 2x \cdot r \cdot x^{r-1} - 2x^r = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r(r-1) + 2r - 2 = 0 \Rightarrow r^2 + r - 2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = < \begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix} \Rightarrow \bar{y} = C_1 \cdot x^{-2} + C_2 \cdot x$$

Căutăm $y_1$ (soluţie particulară) de forma membrului drept: $y_1 = Ax + B$ dar constatăm că avem rezonanţă $y_1 = (Ax + B)\ln x$

$y_1' = A\ln x + \dfrac{Ax + B}{x}$ şi $y_1'' = \dfrac{A}{x} - \dfrac{B}{x^2}$. Înlocuind în ecuaţie avem:

$$x^2\left(\frac{A}{x} - \frac{B}{x^2}\right) + 2x\left(A\ln x + A + \frac{B}{x}\right) - 2(Ax + B)\ln x = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Ax - B + 2Ax + 2B - 2B\ln x = x \Leftrightarrow 3Ax + B - 2B\ln x = x,$$

$$A = \frac{1}{3}, \Rightarrow y_1 = \frac{1}{3}x\ln x \Rightarrow y = \frac{C_1}{x} + C_2 x + \frac{1}{3}x\ln x$$

Punem condiţiile pentru y rezultă $C_1 = 0$ şi $C_2 = 1 \Rightarrow y = x(1 + \frac{1}{3}\ln x)$

Analog $y = \frac{1}{4}x(x-1)$

*Concluzii.* Dacă funcţionala dată are extrem, el se realizează pentru $y = x(1 + \frac{1}{3}\ln x)$ şi $z = \frac{1}{4}x(x-1)$

7. Să se determine mulţimea extremalelor funcţionalei

$$I(u) = \iint_D \left(8xyu + u_x u_y\right)dxdy, \ u \in C^2(\bar{D}),$$

D domeniu mărginit din $R^2$.

***R:*** O condiţie necesară de extrem e dată de ecuaţia Euler-Ostrogradski

$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)=0$ unde F este Lagrangeanul funcţionalei, adică

$F(x,y,u_x,u_y)=8xyu+u_x u_y$

Înlocuim $\frac{\partial F}{\partial u}=8xy;\frac{\partial F}{\partial u_x}=u_y$ şi $\frac{\partial F}{\partial u_y}=u_x$ în ecuaţia Euler - Ostrogradski

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 8xy-\frac{\partial}{\partial x}(u_y)-\frac{\partial}{\partial y}(u_x)=0\Leftrightarrow 8xy-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 8xy-2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0\Leftrightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=4xy. \end{array}$$

Să rezolvăm ecuaţia: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=4xy\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial y}=\int 4xydx+f(y);$

$\frac{\partial u}{\partial y}=3x^2y+f(y).$ Cunoaştem derivata lui x în raport cu y. Deducem că pentru a găsi u se integrează în raport cu y $\Rightarrow u(x,y)=\int(2x^2y+f(y))dy+g(x);\ u(x,y)=x^2y^2+g(x)+h(y)$.

Am găsit soluţia generală a ecuaţiei Euler – Ostrogradski care ne dă mulţimea extremalelor funcţionalei date.

*Observaţie*. Dacă s-ar da condiţii suplimentare, atunci pentru determinare găsim mulţimea extremalelor admisibile.

8. Să se determine mulţimea extremalelor funcţionalei:

$$I(u)=\iint_{\overline{D}}\left(2x^2u+u^2{}_x+2yu_y\right)dxdy,\ u\in C^2(\overline{D}),$$

D domeniu mărginit din $R^2$.

***R:*** O condiţie necesară de extrem e dată de ecuaţia Euler-Ostrogradski

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)=0 \text{ unde } F(x,y,u,u_x,u_y)=2x^2u+u^2{}_x+2yu_y.$$

Înlocuim $\frac{\partial F}{\partial u}=2x^2;\frac{\partial F}{\partial u_x}=2u_x$ şi $\frac{\partial F}{\partial u_y}=2y$ în ecuaţia Euler – Ostrogradski

$$\Rightarrow 2x^2-\frac{\partial}{\partial x}\left(2\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}(2y)=0 \Leftrightarrow 2x^2-2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2=0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=x^2-1.$$

Ecuaţia diferenţială cu derivată parţială de ordin 2.

Ecuaţia se rezolvă astfel:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x}=x^2-1 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=x^2-1 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\int (x^2-1)dx+f(y)=\frac{x^3}{3}-x+f(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x,y)=\int\left[\frac{x^3}{3}-x+f(y)\right]dx+g(y)=\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{2}x+xf(y)+g(y).$$

Soluţia generală a ecuaţiei Euler – Ostrogradski, care ne dă mulţimea extremalelor funcţionalei este:

$u(x,y)=\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{2}x+xf(y)+g(y)$, unde $f$ şi $g$ sunt funcţii arbitrare de clasă $C^2$.

*Observaţie.* Soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale cu derivate parţiale de ordinul 2 depinde de două funcţii arbitrare.

9. Să se determine extremalele funcţionalei

$$I(u)=\iint_{\overline{D}}[u_x u_y+(2u_x+u_y+4x)\cdot u]dxdy,\ u\in C^2(\overline{D}),$$

D domeniu mărginit din $R^2$.

***R:*** O condiţie necesară de extrem e dată de ecuaţia Euler-Ostrogradski

$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)=0,$ unde F este Lagrangeanul funcţionalei, adică

$$F(x,y,u,u_x,u_y)=u_x u_y+(2u_x+u_y+4x)u$$

Înlocuim $\frac{\partial F}{\partial u}=2u_x+u_y+4x; \frac{\partial F}{\partial u_x}=u_y+2u; \frac{\partial F}{\partial u_y}=u_x+u$ în ecuaţia Euler - Ostrogradski

$$\Rightarrow 2u_x+u_y+4x-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+u\right)=0 \Leftrightarrow 2\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+4x-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}-$$

$$-\frac{\partial u}{\partial y}=0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2x,$$

care e o ecuaţie diferenţială cu derivate parţiale de ordin 2.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2x \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=2x \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=\int 2x dx+f(y)=x^2+f(y)$$

$$\Rightarrow u(x,y)=\int (x^2+f(y))dy+g(x)=x^2y+\int f(y)dy+g(x).$$

Notăm $\int f(y)dy=h(y) \Rightarrow u(x,y)=x^2y+g(x)+h(y),$ unde g şi h sunt funcţii arbitrare de clasă $C^2$.

10. Să se determine extremalele funcţionalei

$$I(u)=\iint_{\overline{D}}(24y^2u+u^2{}_y-4xu_x)dxdy,\ u\in C^2(\overline{D}),$$

D domeniu mărginit din $R^2$.

***R:*** O condiţie necesară de extrem e dată de ecuaţia Euler-Ostrogradski

$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)=0,$ unde F este Lagrangeanul funcţionalei, adică

$$F(x,y,u,u_x,u_y)=24y^2u+u^2{}_y-4xu_x.$$

Înlocuim $\frac{\partial F}{\partial u} = 24y^2; \frac{\partial F}{\partial u_x} = -4x$ şi $\frac{\partial F}{\partial u_y} = 2u_y$ în ecuaţia Euler – Ostrogradski

$24y^2 - \frac{\partial}{\partial x}(-4x) - \frac{\partial}{\partial y}\left(2 \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12y^2 + 2,$ care e o ecuaţie diferenţială cu derivate parţiale de ordin 2.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12y^2 + 2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 12y^2 + 2 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} =$$

$$= \int (12y^2 + 2)dy + f(x) = 4y^3 + 2y + f(x) \Rightarrow u(x,y) = \int [4y^3 + 2y + f(x)]dy +$$

$$+ g(x) = y^4 + y^2 + yf(x) + g(x)$$

cu f şi g funcţii arbitrare. Mulţimea extremalelor funcţionalei este dată de soluţia generală a ecuaţiei Euler – Ostrogradski;

$u(x,y) = y^4 + y^2 + y(f(x) + g(x)),$ cu f şi g funcţii arbitrare de clasă $C^2$.